Fase local
Soluciones

1 **Encontrad todas las funciones f: N ® N tales que f(f(n)) = n+2 para todo número natural n.**

Al ser f(f(n)) = n+2 una función lineal (no la identidad), f debe ser también lineal, f(n) =a.n +b.

$f(f(n)) = f(a.n +b) = a(a.n +b) +b = a^2 .n +(a+1)b = n+2$

identificando coeficientes: $a^2 =1$, entonces a=1 y b=1 (a=-1, no es posible b).

Solución, f(n) = n+1.■

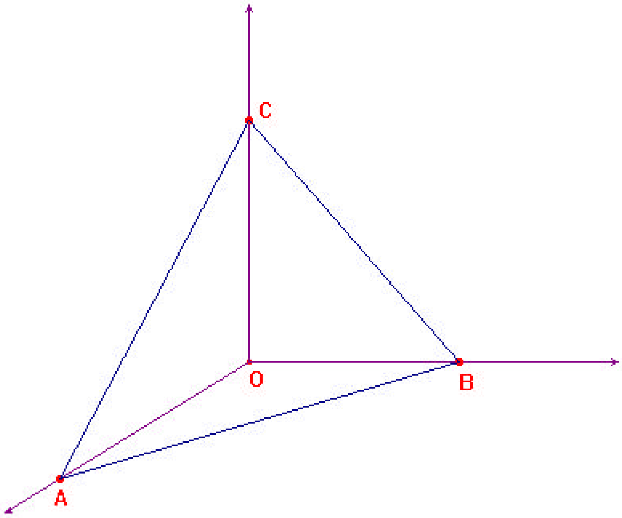
XL Olimpiada Matemática Española 2004

Fase local

Soluciones

2	**Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio; ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden en el mismo eje. Demostrar que el triángulo es acutángulo.**

Teniendo en cuenta los nombres de los puntos de la figura, sean las distancias de A, B, C a O, m, n, p, respectivamente.



Los triángulos OAB, OBC y OCA son rectángulos cuyas hipotenusas al cuadrado son $m^2 + n^2$, $p^2 + n^2$, $m^2 + p^2$, respectivamente. Dichas hipotenusas son los lados del triángulo ABC.

Por el teorema del coseno aplicado al triángulo ABC (tomando el ángulo del vértice A, para los otros dos sería análogo):

$b.c.\cos A = b^2 + c^2 - a^2 = m^2 + p^2 + m^2 + n^2 - (p^2 + n^2) = 2.\ m^2 > 0$

por lo que $\cos A > 0$ y A es agudo.■

XL Olimpiada Matemática Española 2004

Fase local

Soluciones

3	**Hallad el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, en cada partido hay 3 posibles resultados)**

Para asegurar 5 aciertos elegiremos 5 partidos, por ejemplo, los 5 primeros, daremos a cada uno los tres resultados posibles, de esta forma se generan tantas quinielas (los 9 resultados restantes se rellenan con un signo cualquiera) como variaciones de 3 signos tomados 5 a 5 con repetición, es decir, $3^5 = 243$.■

XL Olimpiada Matemática Española 2004

Fase local

Soluciones

4 **Demostrar que si –1<x<1 , -1<y<1,** $\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \le \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$

De las condiciones dadas, xy<1, es decir, 1-xy > 0, también $1-x^2y^2 > 0$

Analizamos los siguientes casos:

$$\text{Si } x.y \ge 0 \Rightarrow \frac{|x|+|y|}{1+|xy|} - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right| = \frac{|x|+|y|}{1+xy} - \frac{|x-y|}{1-xy} = \frac{|x|+|y|-|x-y|-xy(|x|+|y|+|x-y|)}{1-x^2y^2}$$

como el denominador es positivo es signo del cociente será el del numerador:

Si x ^{3}0, x ^{3}y: $\textit{Numerador} = 2y - 2xy^2 = 2x(1-y^2) > 0$

Si x ^{3}0, x<y: $\textit{Numerador} = 2x - 2x^2y = 2x(1-xy) > 0$

Si x<0, x ^{3}y: $\textit{Numerador} = -2x + 2xy^2 = -2x(1-y^2) > 0$

Si x<0, x<y: $\textit{Numerador} = -2y + 2x^2y = -2y(1-xy) > 0$

$$\text{Si } x.y < 0 \Rightarrow \frac{|x|+|y|}{1+|xy|} - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right| = \frac{|x|+|y|}{1-xy} - \frac{|x-y|}{1-xy} = \frac{|x|+|y|-|x-y|}{1-xy}$$

como el denominador es positivo es signo del cociente será el del numerador:

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow |x|+|y|-|x-y| = x-y-x+y = 0$$

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow |x|+|y|-|x-y| = -x+y+x-y = 0$$

Por tanto, en todo caso $\frac{|x|+|y|}{1+|xy|} - \left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \ge 0$.■

Fase local

Soluciones

5 **Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ (x es la variable, A, B, C son parámetros). Supongamos que si a, b, c son las tres raíces de P, las de Q son $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{2}$. Determinad todos los posibles polinomios P, Q.**

Observamos que Q(x) es la derivada de P(x).

Como P(x) = (x-a).(x-b).(x-c), entonces

$$Q(x) = (x-b).(x-c) + (x-a).(x-c) + (x-a).(x-b)$$

$$Q\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2} - b\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right) =$$

$$= -\frac{(a-b)^2}{4} = 0 \Rightarrow a = b$$

Análogamente se obtiene: $Q\left(\frac{b+c}{2}\right) = -\frac{(b-c)^2}{4} = 0 \Rightarrow b = c$

Por tanto, $P(x) = (x-a)^3$ y $Q(x) = 3(x-a)^2$, donde $a \in R$. ■

6 **Hallad todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.**

La cifra de las unidades de los cuadrados de los números enteros es una de las siguientes: 0, 1, 4, 5, 6 ó 9. Para que la suma de dos cuadrados termine en 3, como 2003, será porque las últimas cifras de los sumandos son 4 y 9.

Para que $2003 - x^2$ pueda ser un cuadrado, $x < 45$.

Los posibles números menores de 45 serían del tipo 10.a+2 o 10.a+8, y, 10.b+3 o 10.b+7 .

Obligando a que se cumpla que la suma de sus cuadrados sea 2003 se obtienen:

$$(10a+2)^2+(10b+3)^2=2003=100(a^2+b^2)+40a+60b+13 \quad ,$$

simplificando se llega a: $10(a^2+b^2)+4a+6b=199$,

lo que es imposible, el primer miembro es par y el del segundo impar.

Análogamente ocurre con los otros tres casos:

$$(10a+2)^2+(10b+7)^2=2003=100(a^2+b^2)+40a+140b+53$$

$$(10a+8)^2+(10b+3)^2=2003=100(a^2+b^2)+160a+60b+73$$

$$(10a+8)^2+(10b+7)^2=2003=100(a^2+b^2)+160a+140b+113$$

Por tanto, 2003 no se puede expresar como suma de los cuadrados de dos números enteros.■