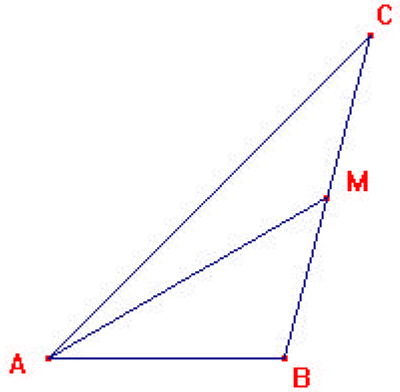
XLI Olimpiada Matemática Española 2005

Fase local

Soluciones

1 **Se considera un triángulo ABC con ÐBAC = 45º y ÐACB = 30º. Si M es el punto medio del lado BC, se pide demostrar que ÐAMB = 45º y que BC.AC = 2.AM.AB.**



Por el teorema del seno aplicado al triángulo ABC, $\frac{BC}{AB}=\frac{\text{sen } 45^{o}}{\text{sen } 30^{o}}=\frac{\sqrt{2}/2}{1/2}=\sqrt{2}$

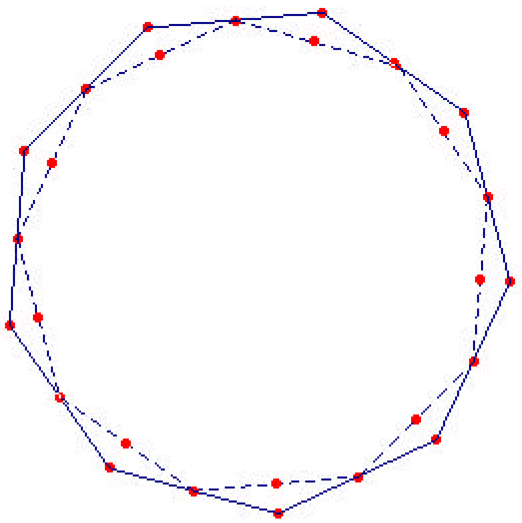
Por lo que $\frac{AB}{BM}=\frac{BC/\sqrt{2}}{BC/2}=\sqrt{2}$. Como consecuencia los triángulos ABC y ABM son semejantes, ya que tienen un ángulo igual, el del vértice B, y los lados que le comprenden proporcionales. Los ángulos ∠BAC y ∠BMA son iguales a 45º.

Por la semejanza, $BC \cdot AC = AB \cdot \sqrt{2} \cdot AM.\sqrt{2} = 2 \cdot AB \cdot AM$ ■

S. L. P.

Soluciones

2 **Cuatro bolas negras y cinco bolas blancas se colocan, en orden arbitrario, alrededor de una circunferencia.**
Si dos bolas consecutivas son del mismo color, se inserta una nueva bola negra entre ellas. En caso contrario, se inserta una nueva bola blanca.
Se retiran las bolas negras y blancas previas a la inserción.
Repitiendo el proceso, ¿es posible obtener nueve bolas blancas?



Como modelo equivalente a lo expuesto podemos considerar que las bolas ocupan los nueve vértices de un eneágono regular y que las bolas que se insertan se colocan en los puntos medios de los lados.

Por tanto se insertan 9 bolas, después de retirar las nueve iniciales, las 9 insertadas ocupan los vértices de otro eneágono regular.

Repitiendo el proceso obtendríamos 9 bolas colocadas en los vértices de un eneágono regular. Si son todas blancas, es porque las que ocupaban los vértices del eneágono anterior eran distintas en los extremos de cada lado. Esto es imposible puesto que el número de vértices es impar.

No es posible obtener nueve bolas blancas.■

XLI Olimpiada Matemática Española 2005

Fase local
Soluciones

3	**Encontrar todos los números enteros positivos n tales que $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$.**

Si $3^n + 5^n$ es múltiplo de $3^{n-1} + 5^{n-1}$, entonces

$$3^n + 5^n = m \cdot \left(3^{n-1} + 5^{n-1}\right), \text{ donde } m > 0 \text{ es entero}$$

$$3^n - m \cdot 3^{n-1} = m \cdot 5^{n-1} - 5^n \quad \Rightarrow \quad 3^{n-1}(3 - m) = 5^{n-1}(m - 5)$$

Si m ≠ 4, los miembros de la última igualdad son de distinto signo o nulos por separado (las potencias de base 3 o 5, son positivas), por lo que no se cumple la igualdad.

Si m = 4 resulta la igualdad $-3^{n-1} = -5^{n-1}$ que se verifica para n = 1.

El número entero positivo pedido es 1.■

XLI Olimpiada Matemática Española 2005

Fase local

Soluciones

4

Sean x_1 , x_2 las raíces del polinomio $P(x)=3x^2+3mx+m^2-1$ **, siendo m un número real. Probar que** $P(x_1^3)=P(x_2^3)$ **.**

Comprobemos que la diferencia siguiente es nula:

$$P(x_1^3)-P(x_2^3)=3x_1^6+3mx_1^3+m^2-1-\left(3x_2^6+3mx_2^3+m^2-1\right)=$$

$$=3\left(x_1^6-x_2^6\right)+3m\left(x_1^3-x_2^3\right)=3\left(x_1^3-x_2^3\right)\left(x_1^3+x_2^3\right)+3m\left(x_1^3-x_2^3\right)=$$

$$=3\left(x_1^3-x_2^3\right)\left(x_1^3+x_2^3\right)+3m\left(x_1^3-x_2^3\right)=3\left(x_1^3-x_2^3\right)\left(x_1^3+x_2^3+m\right)$$

teniendo en cuenta las propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado

$$(x_1+x_2)^3=x_1^3+x_2^3+3.x_1.x_2.(x_1+x_2)\ ,\ \ x_1+x_2=-m\,,\ x_1.x_2=\frac{m^2-1}{3}$$

podemos hallar el valor del factor:

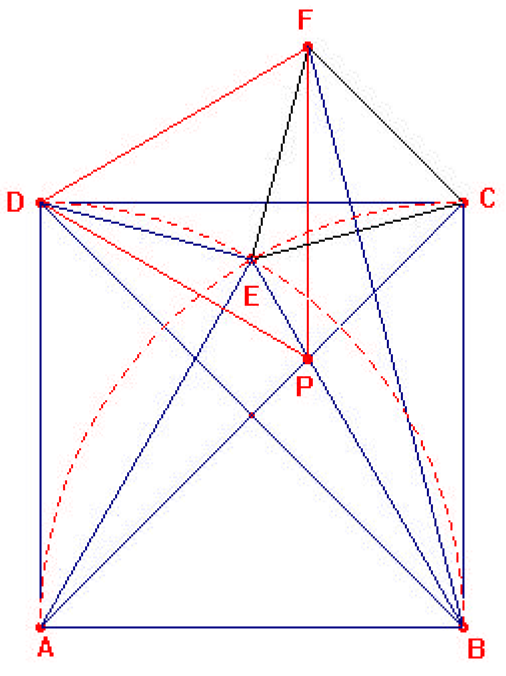
$$x_1^3+x_2^3+m=(x_1+x_2)^3-3.x_1.x_2.(x_1+x_2)=-m^3-3\frac{m^2-1}{3}(-m)=0$$

Por tanto, el producto $3\left(x_1^3-x_2^3\right)\left(x_1^3+x_2^3+m\right)$ es 0 y se cumple que $P(x_1^3)=P(x_2^3)$.■

S. L. P.

Fase local
Soluciones

5 **En el interior de un cuadrado ABCD se construye el triángulo equilátero ABE. Sea P el punto intersección de las rectas AC y BE, Sea F el punto simétrico del P respecto de la recta DC. Se pide demostrar que:**
a) el triángulo CEF es equilátero.
b) el triángulo DEF es rectángulo e isósceles.
c) el triángulo BDF es isósceles.
d) el triángulo PDF es equilátero.



a) El triángulo EBC es isósceles (EB=CB) , el ∠EBC = 30º, entonces ∠BEC = ∠ECB = 75º. El ∠ECP = 30º por lo que el triángulo ECP es isósceles (∠CEP = ∠EPC = 75º), es decir, **EC = FC**. Además ∠ECD = 15º y ∠DCF = ∠DCP = 45º, por lo que **ÐECF = 60º.** Por tanto, el triángulo CEF es equilátero

b) Los triángulos BEC y ADE son iguales, **DE =** EC = **FE** (por a)). En el punto E los ángulos concurrentes suman 2.75º + 2.60º , por lo que **ÐDEF = 90º.** Por tanto, el triángulo DEF es rectángulo e isósceles.

c) Los triángulos AEC y BEF son iguales (AE = EB, EC = EF, ∠AEC = 135º =∠BEF), por tanto **DB =** AC = **BF**. Por tanto, el triángulo BDF es isósceles.

d) DF = DP (DC es la mediatriz de PF), DP = PB (AC es la mediatriz de DB), PB = PF (∠PBF = 15º = ∠PFB), es decir, DF = DP = PF y el triángulo PDF es equilátero.

■

6 **Encontrar todas las funciones f: R ® R tales que**

$$x^2 \cdot f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$$

Si z es real : $z^2 \cdot f(z) + f(1-z) = 2z - z^4$,haciendo $z = 1-x$

$$(1-x)^2 \cdot f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \quad (*)$$

despejando en $x^2 \cdot f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$, $f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 \cdot f(x)$

sustituyendo en (*):

$$(1-x)^2 \cdot \left(2x - x^4 - x^2 \cdot f(x)\right) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4$$

$$\left(1 - x^2.(1-x)^2\right) f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 - (1-x)^2\left(2x - x^4\right)$$

$$f(x) = \frac{2(1-x) - (1-x)^4 - (1-x)^2\left(2x - x^4\right)}{1 - x^2.(1-x)^2} = \frac{(x+1)(x-1)\left(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1\right)}{-x^4 + 2x^3 - x^2 + 1}$$

$f(x) = 1 - x^2$.■