FASE LOCAL DE LA XLIV OME
SESIONES PRIMERA Y SEGUNDA
18 y 19 DE ENERO DE 2008 (TARDE Y MAÑANA)

1. Demuestra que no existen enteros *a, b, c, d* tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$ cumpla que $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.

SOLUCIÓN:
Supongamos que tal polinomio existe.
Por el teorema del resto $P(x) = (x-4)Q(x) + 1,$, siendo $Q(x)$ un polinomio de grado dos con coeficientes enteros.
Entonces $P(7) = 2 = (7-4)Q(7) + 1 \ \Rightarrow \ Q(7) = \frac{1}{3}$ que no es entero, en contra de la hipótesis.

2. En el triángulo *ABC*, el área *S* y el ángulo *C* son conocidos. Hallar el valor de los lados *a* y *b* para que el lado *c* sea lo más corto posible.

SOLUCIÓN:
Por una parte

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos C)$ y por otra

$S = \frac{1}{2} absenC \Rightarrow ab = \frac{2S}{senC}$. Entonces,

$c^2 = (a-b)^2 + \frac{4S(1-\cos C)}{senC}$ será mínimo cuando $a = b = \sqrt{\frac{2S}{senC}}$.

3. Determina todas las ternas de números reales (a,b,c), que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} a^5 = 5b^3 - 4c \\ b^5 = 5c^3 - 4a. \\ c^5 = 5a^3 - 4b \end{cases}$

SOLUCIÓN:
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = \text{máximo}\{a,b,c\}$.
Primer caso: $c \geq b$. Entonces $a^5 + 4c \geq c^5 + 4b$ y $b \geq a$. De este modo $a = b = c$.
Segundo caso: $b \geq c$. Entonces $b^5 + 4a \geq c^5 + 4b$ y $c \geq a$. Por tanto $a = b = c$.
Así todo se reduce a resolver la ecuación $t^5 - 5t^3 + 4t = 0,$ donde $t = a = b = c$.
Claramente $t \in \{0, 1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ y hay cinco posibles ternas que cumplen el sistema dado.

4. ¿Qué número es mayor 999! ó 500^{999}? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN:

Pongamos $A = 999!$, $B = 500^{999}$, tenemos

$$\frac{A}{B} = \frac{500-499}{500}\cdot\frac{500-498}{500}\cdots\frac{500-1}{500}\cdot\frac{500}{500}\cdot\frac{500+1}{500}\cdots\frac{500+498}{500}\cdot\frac{500+499}{500} =$$

$$\left(1-\frac{499}{500}\right)\left(1-\frac{498}{500}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{500}\right)1\left(1+\frac{1}{500}\right)\cdots\left(1+\frac{498}{500}\right)\left(1+\frac{499}{500}\right) =$$

$$\left[1-\left(\frac{499}{500}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{498}{500}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{2}{500}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{1}{500}\right)^2\right] < 1.$$

Por tanto $A < B$.

5. Sean D, E, F los puntos de tangencia del círculo inscrito al triángulo ABC con los lados BC, AC y AB respectivamente. Demuestra que

$$4S_{DEF} \le S_{ABC}$$

donde S_{XYZ} denota el área del triángulo XYZ.

SOLUCIÓN:

Sea I el incentro del triángulo ABC. Tenemos que $ID \perp BC, IE \perp AC$ e $IF \perp AB$. Por otro lado, utilizando las notaciones usuales,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\,sen\,A = \frac{1}{2}bc\,sen\,A \quad \text{y} \quad S_{EFI} = \frac{1}{2}EI\cdot FI\,sen\,EIF = \frac{1}{2}r^2\,sen\,EIF.$$

Como los ángulos A y EIF son suplementarios, entonces $sen\,A = sen\,EIF$ y $\dfrac{S_{EIF}}{S_{ABC}} = \dfrac{r^2}{bc}$. Análogamente $\dfrac{S_{EID}}{S_{ABC}} = \dfrac{r^2}{ab}$ y $\dfrac{S_{FID}}{S_{ABC}} = \dfrac{r^2}{ca}$.

Sumando estas tres fracciones resulta:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{EIF}+S_{EID}+S_{FID}}{S_{ABC}} = \frac{r^2(a+b+c)}{abc}.$$

Como $S_{ABC} = r\left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)$ y $4R\,S_{ABC} = abc$, se obtiene $\dfrac{r^2(a+b+c)}{abc} = \dfrac{r}{2R}$.

Aplicando ahora la desigualdad de Euler $R \ge 2r$, se obtiene $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{r}{2R} \le \dfrac{1}{4}$ y la igualdad se cumple cuando el triángulo ABC es equilátero.

6. Las longitudes de los lados y de las diagonales de un cuadrilátero convexo plano $ABCD$ son racionales. Si las diagonales AC y BD se cortan en el punto O, demuestra que la longitud OA es también racional.

SOLUCIÓN:

Sean $\angle ABD = \alpha$, $\angle CBD = \gamma$ y $\angle CBA = \beta$.

Por el teorema del coseno en el triángulo ΔABC, $\cos\beta = \dfrac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2AB \cdot BC}$ es un número racional. Análogamente $\cos\alpha$ y $\cos\gamma$ son números racionales.

Por otra parte, $\cos\beta = \cos(\alpha+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - sen\alpha\, sen\gamma$. Y así $sen\alpha\, sen\gamma$ es un número racional. También es racional $sen^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$. Por tanto $\dfrac{sen\alpha}{sen\gamma} = \dfrac{sen\alpha\, sen\gamma}{sen^2\gamma}$ es racional.

Aplicando el teorema de los senos a los triángulos ΔOAB y ΔOCB respectivamente se tiene que $\dfrac{AB}{sen\angle BOA} = \dfrac{AO}{sen\alpha}$ y $\dfrac{BC}{sen\angle BOC} = \dfrac{OC}{sen\gamma}$. Se deduce que $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{AB}{BC} \cdot \dfrac{sen\alpha}{sen\gamma} = r$, es un número racional. Entonces $AC = OA + OC = (1+r)OA$.

Por tanto $OA = \dfrac{AC}{1+r}$ es racional.