XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera y segunda sesión

Viernes tarde, 23 de enero de 2008

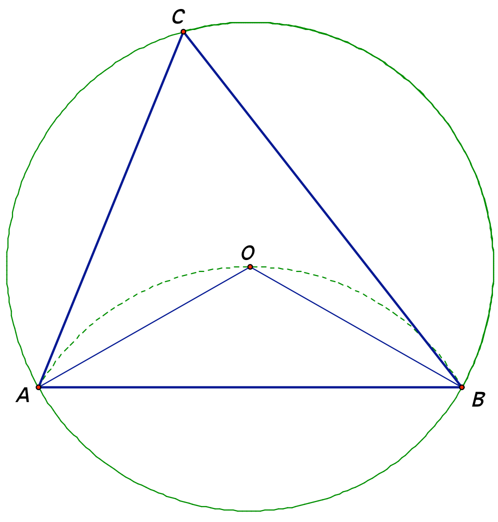
SOLUCIONES

1 y 4. Dado un triángulo acutángulo ABC, determinar para que puntos de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

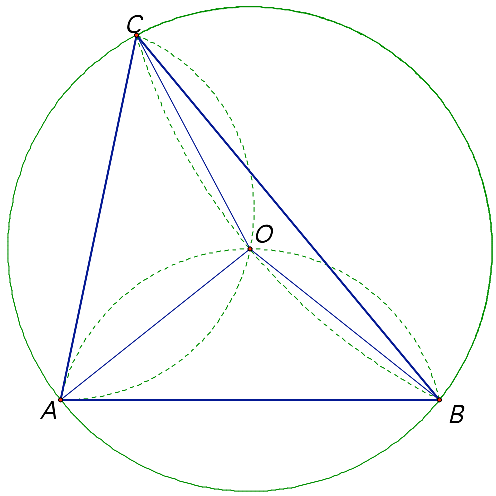
$$1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2, \qquad 1 \leq \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \leq 2 \quad \text{y} \quad 1 \leq \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2.$$

Solución:

Sea O el cincuncentro del triángulo ABC. El valor del ángulo ACB, por estar inscrito en la circunferencia, es la mitad del ángulo AOB. De nuevo, para cualquier punto, P, sobre el arco AOB se tiene $\angle APB = \angle AOB = 2\angle ACB$. Por tanto, este arco separa el interior del triángulo en dos partes: para los puntos Q situados a un lado del arco AOB, el valor del ángulo $\angle AQB$ es mayor que $\angle AOB$ y para los situados al otro lado del arco el ángulo $\angle AQB$ es menor que $\angle AOB$. Así pues, los puntos del interior del triángulo que están sobre el arco AOB o fuera del segmento circular AOC son los que satisfacen la primera de las condiciones $1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB} \leq 2$.



El mismo razonamiento para las cuerdas BC y CA nos conducen a que el punto O es el único que puede cumplir las tres condiciones.



2 y 5. La igualdad 2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55 es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un sólo dígito.

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

Solución:

Agrupando los números con igual cantidad de cifras tendremos la ecuación

$2009 = 1111a + 111b + 11c$

donde a, b y c son números enteros menores o iguales que $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$, puesto que los sumandos de la descomposición han de ser diferentes.

Se tiene entonces $2009 = 182 \cdot 11 + 7 = 11\,(101a + 10b + c\,) + b$. De donde $182 = 101a + 10b + c + (b - 7)/11$. Como a, b y c son números enteros, se tiene que b ha de ser de la forma $c = 11k + 7$, para algún valor natural de k comprendido entre 0 y 3 (recordar que $c \leq 45$).

Substituyendo, obtenemos que $182 = 101a + 110k + 70 + c + k$, de donde $112 = 101a + 111k + c$. Las posibles soluciones son ($a = 1$, $k = 0$, $c = 11$) y ($a = 0$, $k = 1$, $c = 1$). En el primer caso tenemos $b = 7$, y en el segundo $b = 18$, luego una descomposición puede ser $2009 = 1111 + 777 + 66 + 55$, en la que $c = 11$ se ha descompuesto como $6 + 5$.

Analizando las soluciones vemos que no es posible obtener una descomposición para 2009 con menos de 4 sumandos, siendo las del primer tipo $a = 1$, $b = 7$, $c = 9 + 2 = 8 + 3 = 7 + 4 = 6 + 5$, y las del segundo tipo $a = 1$, $b = 9 + 8 + 1 = 9 + 7 + 2 = 9 + 6 + 3 = 9 + 5 + 4 = 8 + 7 + 3 = 8 + 6 + 4 = 7 + 6 + 5$, $c = 1$.

3 y 6. Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

Solución:

Consideramos el punto que está conectado con el número más alto de puntos de otro color. Supongamos que este punto N es de color negro y que está conectado a k puntos de color blanco. Como $k \leq n$ y N está conectado a $n + 1$ puntos, existirá un punto A de color azul al que está conectado N. El número de puntos negros con los que está conectado A es necesariamente menor o igual que k, por lo que A está conectado con por lo menos $n + 1 - k$ puntos blancos. Como sólo hay n puntos de color blanco y el número de los conectados con N más los conectados con A suman por lo menos $n + 1$, necesariamente hay un punto blanco conectado a ambos, con lo que ya tenemos el triángulo buscado.

XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera y segunda sesión

Sábado mañana, 24 de enero de 2008

SOLUCIONES

1. y 4. Probar que para todo entero positivo n, $n^{19} - n^7$ es divisible por 30.

Solución:
$n^{19} - n^7 = n^7(n^{12} - 1) = n^7(n^6 + 1)(n^6 - 1) = n^7(n^6 + 1)(n^3 + 1)(n^3 - 1)$, con lo que en la descomposición de $n^{19} - n^7$ aparecen tres números consecutivos, $n - 1$, n, $n + 1$, de los cuales al menos uno es divisible por 2 y exactamente uno es divisible por 3.

Completaremos la descomposición para probar que aparece un factor divisible por 5, y habremos terminado.

$$n^{19} - n^7 = n^7(n^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1)$$

Si ninguno de los números $n - 1$, n, $n + 1$ es múltiplo de 5, entonces $n = 5k \pm 2$, con lo que $(n^2 + 1) = 25k^2 \pm 20k + 5$ es múltiplo de 5, como queríamos.

2. y 5. Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:

i) Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.

ii) Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.

Solución:

Sean r y s dos rectas que se cruzan en el espacio. Sean A, B y C tres puntos distintos de r y sean P, Q y R tres puntos distintos en s. Cada uno de los puntos de r define con s un plano, y análogamente cada punto de s con r. Estos 6 planos cumplen las condiciones del problema, por lo que el número buscado es mayor o igual que 6.

Probaremos que no es posible satisfacer las condiciones con más de 6 planos.

Comenzamos por ver que no puede haber tres puntos en una misma recta. En efecto, si suponemos que los puntos H, J, K están sobre una recta l, ningunos de los restantes puntos, L, M, N, puede estar en l, por la condición b. Estos tres puntos L, M y N, pertenecen como mucho a tres de los planos, por lo que los demás planos contienen al menos a 2 de los puntos de l, y por tanto a toda la recta. Es decir, al menos cuatro planos contienen a l, lo que es imposible, porque al menos uno de ellos no podría contener a ninguno de los puntos L, M o N, contrario a la condición a.

Veremos ahora que ningún plano puede contener a más de cuatro de los puntos. Supongamos que uno de los planos contiene a cinco de los puntos y deja fuera al punto X. Como acabamos de ver que no puede haber tres puntos alineados, un plano que contenga a X contendría como mucho a dos de los otros puntos, contrario a la condición a.

Resumiendo, cada uno de los planos contiene exactamente a cuatro de los seis puntos y no hay tres que estén en la misma recta.

Cada plano deja fuera un par de puntos y dos planos distintos dejan fuera a puntos distintos, de lo contrario habría tres puntos en ambos planos, y deberían estar alineados. Como seis puntos sólo se pueden agrupar en tres pares disjuntos de puntos, es imposible que existan más de seis planos en las condiciones del problema.

3. y 6. Los puntos de una retícula $m \times n$ pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto P de ella, la fila y columna que pasan por este punto P tienen ambas el mismo número de puntos de igual color que P. Determinar todos los pares de enteros positivos (m, n) para los que existe una retícula equilibrada.

Solución:

Denotaremos por $BF(i)$ el número de puntos de color blanco que hay en la fila i y con $BC(j)$ el número de puntos blancos en la columna j. Análogamente, $NF(i)$ y $NC(j)$ denotarán el número de puntos negros en la fila i y en la columna j, respectivamente. Siendo P_{ij} el punto que se encuentra en la fila i y en la columna j, suponiendo que es de color blanco, la condición de ser equilibrada se leerá $BF(i) = BC(j)$.

Supongamos que el punto P_{11} de una retícula equilibrada de n filas y m columnas es de color negro, y sea k el número de puntos negros de la primera fila. Intercambiando las columnas, si fuere necesario, podemos suponer que estos puntos de color negro son los

k primeros, P_{11}, …,P_{1k}. Por la condición de equilibrio para P_{11}, la primera columna también tendrá exactamente k puntos de color negro que, reordenando las filas, si fuere necesario, supondremos que son los k primeros puntos, P_{11}, …, P_{k1}.

Sea P_{ij} , con $1 < i \leq k$ y $1 < j \leq k$. Supongamos que P_{ij} es de color blanco. Se tendrá entonces que $BF(i) = BC(j)$. Pero por ser negro el punto P_{1j}, $NC(j) = NF(1) = k$, y por ser negro el punto P_{i1}, $NF(i) = NC(1) = k$. De donde,

$$n = BF(i) + NF(i) = BF(i) + k = BC(j) + k = BC(j) + NC(j) = m.$$

Suponiendo que, por ejemplo, $n > m$, tendremos que todos los puntos negros de las filas 1 a k están en las primeras columnas, y análogamente todos los puntos negros de las columnas 1 a k están en las primeras filas

$$
\begin{matrix}
 & \overbrace{\hphantom{\bullet \; \cdots \; \bullet}}^{k} & \overbrace{\hphantom{\circ \; \cdots \; \circ}}^{n-k} \\
k\left\{\vphantom{\begin{matrix}\bullet\\ \vdots\\ \bullet\end{matrix}}\right. & \begin{matrix}\bullet & \cdots & \bullet\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \bullet & \cdots & \bullet\end{matrix} & \begin{matrix}\circ & \cdots & \circ\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \circ & \cdots & \circ\end{matrix} \\
m-k\left\{\vphantom{\begin{matrix}\circ\\ \vdots\\ \circ\end{matrix}}\right. & \begin{matrix}\circ & \cdots & \circ\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \circ & \cdots & \circ\end{matrix} &
\end{matrix}
$$

Suponiendo que $m - k > 0$, todos los puntos P_{ij}, con $i > k$ y $j > k$, deben ser negros. En otro caso tendríamos un rectángulo con tres vértices de color blanco y uno negro, de donde se seguiría que $n = m$, como vimos al principio.

Por lo tanto, la condición para cualquiera de estos puntos nos dice que

$$n - k = NF(i) = NC(j) = m - k,$$

lo que contradice nuestra suposición de $n > m$. Por tanto, $m - k = 0$, lo que resulta en que $k = n - k$, por la condición para P_{mn}, de donde $n = 2m$.

Luego los posibles pares de números serán (n, n), $(n, 2n)$ y $(2n, n)$, con n un entero positivo.