XV CONCURSO
CANGURO MATEMÁTICO 2008

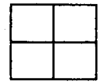
Nivel 6 (2º de Bachillerato)

Día 9 de abril de 2008. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

<u>Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada uno.</u>

1 Los números 3,4 y otros dos números desconocidos se escriben en las casillas de la tabla 2×2 Se sabe que la suma de los números en las filas son 5 y 10, y que la suma de los números en una de las columnas es igual a 9. El mayor de los números desconocidos es



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

2 Si $x+y=0$ y $x \neq 0$, entonces $\frac{x^{2008}}{y^{2008}} =$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2^{2008} E) x/y

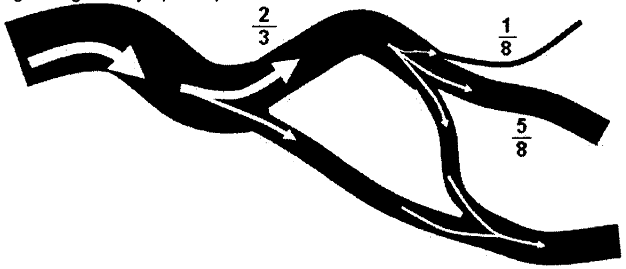
3 Una tabla contiene 21 columnas, numeradas 1, 2, ... 21 y 33 filas, numeradas 1, 2, ... 33. Borramos las filas cuyo número no es múltiplo de 3 y las columnas cuyo número es par. ¿Cuántas casillas de la tabla quedan, después de eso?

A) 110 B) 121 C) 115,5 D) 119 E) 242

4 ¿Cuántos números primos p tienen la propiedad de que p^4+1 es primo también?

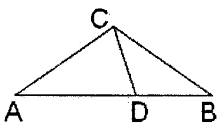
A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) Infinitos

5 Un río empieza en el punto A y se bifurca en dos ramas. Una de ellas recoge 2/3 del agua de la corriente, y la otra el resto. Más tarde, la primera rama se divide en tres ramas una de ellas toma 1/8 del agua de la rama, la segunda 5/8 y la tercera el resto. Más adelante, esta última rama vuelve a encontrarse con la segunda de las ramas iniciales. La figura muestra la situación. ¿Qué porción del agua original fluye por el punto B?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

6 Se da el triángulo isósceles ABC (CA = CB). Se marca el punto D sobre el lado AB de modo que AD = AC y DB = DC (ver la figura). Hallar la medida del ángulo ACB.

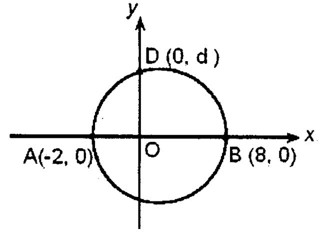


A) 98° B) 100° C) 104°
D) 108° E) 110°

7 El máximo valor de $f(x) = |5\sin x - 3|$ para $x \in R$ es

A) 2 B) 3 C) π D) 5π E) 8

8 La figura muestra un círculo con diámetro AB y un punto D sobre la circunferencia. Calcular OD.



A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4
D) 5 E) 6

9 Se tienen cinco puntos distintos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5, situados en este orden sobre la recta (algunas de las distancias mutuas pueden ser distintas). Se sitúa en la misma recta otro punto P de modo que la suma de las distancias $PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 + PA_5$ es mínima. Entonces el punto P es

A) A_1 B) A_2 C) A_3
D) Cualquier punto entre A_2 y A_4 E) Cualquier punto entre A_1 y A_5

10 Nora quiere colocar en los espacios vacíos del número 2 _ _ 8 dos cifras tales que el número completo sea divisible por 3. ¿Cuántas posibilidades tiene?

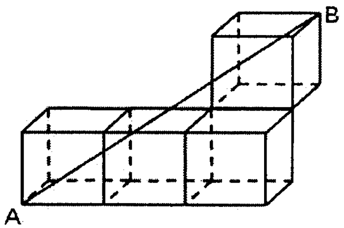
A) 29 B) 30 C) 19 D) 20 E) 33

<u>Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una</u>

11 Tenemos los siete números –9 ; 0 ; –5 ; 5 ; –4 ; –1 ; –3. Agrupamos 6 de ellos en grupos de 2 de modo que la suma de números de cada grupo sea la misma. ¿Qué número queda?

A) 5 B) 0 C) –3 D) –4 E) –5

12 Cada uno de los cubos de la figura tiene arista de longitud 1.
¿Cuál es la longitud del segmento AB?



A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$

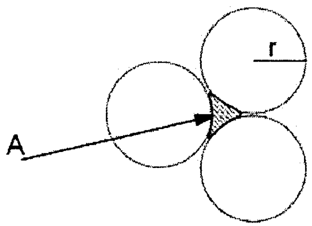
13 Se proponen 5 problemas en un concurso matemático. Como tienen diferente nivel de dificultad, reciben diferentes puntuaciones (enteros positivos). Bill resuelve los 5 problemas y obtiene un total de 10 puntos por los dos problemas con menor puntuación y 18 puntos por los dos problemas con mayor puntuación. ¿Cuántos puntos obtuvo Bill?

A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 40

14 Matilde dibuja 36 canguros usando 3 colores diferentes. 25 de los canguros tienen algo Amarillo, 28 tienen algo marrón y 20 tienen algo negro. Sólo 5 canguros tienen los tres colores. ¿Cuántos canguros están pintados de un solo color?

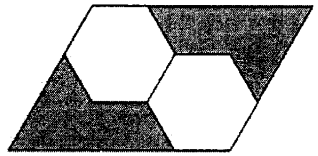
A) Ninguno B) 4 C) 12 D) 31
E) Es imposible saberlo.

15 Tres circunferencias son tangentes dos a dos, según se muestra en la figura. El radio de cada una es r.
El área de A es



A) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\pi\right)r^2$ B) $\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$ C) $\frac{1}{8}\pi r^2$
D) $\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)\pi r^2$ E) $\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)r^2$

16 En la figura los dos hexágonos regulares son iguales.
¿Qué fracción del área del paralelogramo está coloreada?



A) 1/2 B) 1/3 C) 2/3
D) 2/5 E) 5/12

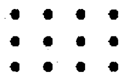
17 El numerador y el denominador de una fracción son números negativos, y el numerador es una unidad mayor que el denominador. ¿Cuál de las siguientes proposiciones se puede aplicar a la fracción?

A) La fracción es un número menor que -1.
B) La fracción es un número entre -1 y 0.
C) La fracción es un número positivo menor que 1.
D) La fracción es un número mayor que 1.
E) No se puede saber si la fracción es positive o negativa.

18 Supongamos que $x^2yz^3 = 7^3$ y $xy^2 = 7^9$. Entonces $xyz =$

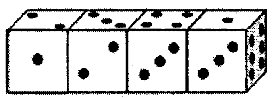
A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

19 Se eligen tres puntos al azar de la siguiente configuración. ¿Cuál es la probabilidad de que estén alineados?



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

20 Cuatro dados idénticos se disponen en fila.(ver la fig.).Cada dado tiene en sus caras los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 , pero no son dados standard, es decir, la suma de puntos en las caras opuestas no vale necesariamente 7.¿Cuál es la suma total de puntos en las 6 caras tangentes de los dados?



A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

<u>Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una</u>

21 Las longitudes de las aristas de un paralelepípedo rectángulo en centímetros, son números enteros y forman una progresión geométrica de razón $q = 2$. ¿Cual de los siguientes puede ser el volumen del paralelepípedo?

A) 120 cm^3 B) 188 cm^3 C) 216 cm^3 D) 350 cm^3 E) 500 cm^3

22 Hallar el valor de la expresión $x^2+y^2+z^2$, si $x+y+z=1$ y $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Imposible saberlo.

23 En la figura cada asterisco representa una cifra. La suma de las cifras del producto vale

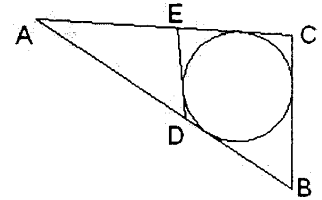
```
   ***
×  1**
------
  22**
+ 90*
 **2
------
 56***
```

A) 16 B) 20 C) 26 D) 30
E) Otra respuesta

24 El primer elemento de una sucesión es $a_1 = 0$, y si $n \geq 1$, entonces $a_{n+1} = a_n + (-1)^n.n$.
Si $a_k = 2008$ entonces el valor de k es

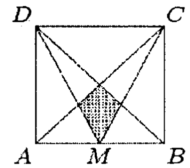
A) 2008 B) 2009 C) 4017 D) 4018 E) Otro

25 Se inscribe un círculo en el triángulo ABC (ver figura), y |AC| = 5, |AB| = 6, |BC| = 3. El segmento ED es tangente al círculo. El perímetro del triángulo ADE es



A) 7 B) 4 C) 9
D) 6 E) 8

26 El cuadrado ABCD tiene su lado de longitud 1 y M es el punto medio de AB.
El área de la región sombreada es

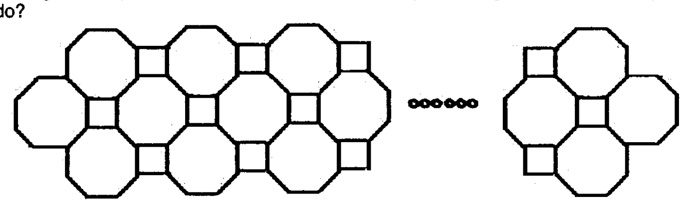


A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{2}{13}$

27 ¿Cuántos números de 2007 cifras hay, tales que todo número de 2 cifras formado por dos cifras consecutivas sea divisible por 17 ó por 23?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) más de 9

28 Usamos segmentos para construir este conjunto. Si hay 61 octógonos, cuantos segmentos hemos utilizado?



A) 488 B) 448 C) 328 D) 226 E) 446

29 El número $3^{32} - 1$ tiene exactamente dos divisores que son mayores que 75 y menores que 85. ¿Cuál es el producto de esos dos divisores?

A) 5852 B) 6560 C) 6804 D) 6888 E) 6972

30 Si sen (x) + cos (x) =m entonces $sen^4(x) + cos^4(x) =$

A) $1-\frac{(1-m^2)^2}{2}$ B) $1+\frac{(1-m^2)^2}{2}$ C) $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$ D) m^4 E) m^4+1