



XII CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2005

Nivel 5 (1º de BACHILLERATO)

Día 17 de marzo de 2005. Tiempo : 1 hora y 15 minutos



No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le correspondieran si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

- 1 Hay ocho canguros en las casillas de la tabla, como se ve en la figura de la derecha. Encuentra el mínimo número de canguros que tienen que saltar a otra celda para que haya exactamente dos canguros en cada fila y en cada columna de la tabla.

- 2 Irene vive con su padre, su madre, su hermano y también tiene un perro, dos gatos, dos loros y cuatro pececitos de colores. ¿Cuántas piernas y patas tienen entre todos?

A) 22 B) 28 C) 24 D) 32 E) 13

- 3 En el concurso Canguro del año pasado, Sara ha obtenido el 50-ésimo mejor resultado y al mismo tiempo el 50-ésimo peor resultado de su centro. ¿Cuántos alumnos han participado en el centro de Sara?

A) 50 B) 75 C) 100 D) 99 E) 101

- 4 Dieciocho alumnos cruzan una calle por parejas. Las parejas están numeradas del 1 al 9. Las parejas numeradas con número par están formadas por chico y chica y las numeradas con número impar por dos chicos. ¿Cuántos chicos están cruzando la calle?

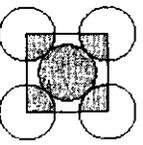
A) 10 B) 12 C) 14 D) 11 E) 18

- 5 Juan infla 8 globos cada tres minutos. ¿Cuántos globos estarán inflados al cabo de dos horas, si cada décimo globo estalla inmediatamente después de inflado?

A) 160 B) 216 C) 240 D) 288 E) 320

- 6 En el gráfico, las cinco circunferencias tienen el mismo radio y son tangentes como se indica. El cuadrado tiene sus vértices en los centros de las cuatro circunferencias exteriores. La razón entre la parte sombreada y la parte no sombreada de los cinco círculos es...

A) 1:3 B) 1:4 C) 2:5 D) 2:3 E) 5:4

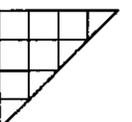


- 7 Una empresa recibe el encargo de construir ladrillos de forma ortodrómica de dimensiones $10\text{cm} \times 12\text{cm} \times 14\text{cm}$, pero equivocadamente los construye de dimensiones $12\text{cm} \times 14\text{cm} \times 16\text{cm}$. ¿Cuál es el porcentaje de incremento del volumen de los construidos con respecto a los encargados?

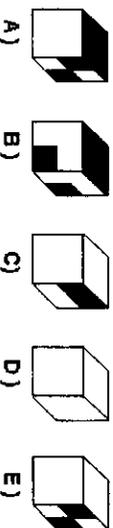
A) 20% B) 30% C) 40% D) 50% E) 60%

- 8 En la figura hay siete cuadrados. ¿Cuántos triángulos hay más que cuadrados?

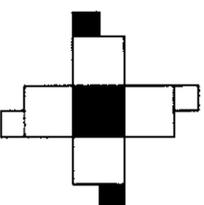
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0



- 9 ¿Cuál de los siguientes cubos se puede formar con el desarrollo de la figura de la derecha?

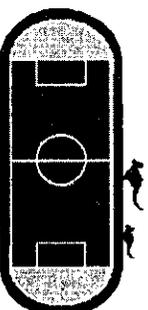


A) B) C) D) E)



- 10 Mamá-canguro y su cría saltan alrededor del estadio, que tiene un perímetro de 330 m, ambas dan un salto por segundo, pero mientras los saltos de Mamá-canguro son de 5 metros de largo, los de la cría son de 2 metros de largo. Empezan en el mismo instante, en el mismo sitio, y se mueven en el mismo sentido. Después de 25 segundos la cría se cansa y se para, mientras que Mamá-canguro sigue saltando. ¿Cuántos segundos pasará la cría esperando a que la alcance su madre?

A) 15 B) 25 C) 51 D) 66 E) 76



Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

- 11 Se llenan los cuadrados vacíos de la tabla de la figura de manera que los números de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales forman progresiones aritméticas. ¿Cuál debe ser el número x?

A) 49 B) 42 C) 33 D) 28 E) 4

					21
		16			
			27		
					x

- 12 Juan espera a Elena durante 19 minutos. El autobús A pasa cada 3 minutos y el autobús B cada 5 minutos. Para entreteñer la espera, cuenta la diferencia entre el número de autobuses A y B que pasan. ¿Cuántos resultados diferentes hay?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

- 13 La figura muestra tres semicircunferencias con los puntos A y B situados exactamente sobre los centros E y F de las dos semicircunferencias inferiores. Si el radio de cada semicircunferencia es 2 cm, el área en cm^2 de la región sombreada es:

A) 2π B) 7 C) $2\pi + 1$ D) 8 E) $2\pi + 2$

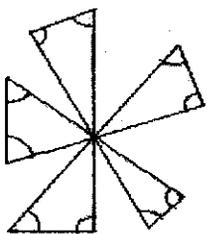


- 14 Dos botellas de igual volumen están llenas, ambas, de agua y zumo. Las razones de los volúmenes de agua y zumo son, respectivamente 2:1 y 4:1. Echamos las mezclas de ambas botellas en una garrafa. La proporción de agua y zumo en la garrafa es:

A) 3:1 B) 6:1 C) 11:4 D) 5:1 E) 8:1

15 ¿Cuánto vale la suma de los 10 ángulos marcados en la figura?

- A) 300° B) 450° C) 360° D) 600° E) 720°



16 La media de 16 enteros distintos y mayores que cero es 16. ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar uno de esos enteros?

- A) 16 B) 24 C) 32 D) 136 E) 256

17 Cada una de estas piezas de alambre está hecha con ocho segmentos de longitud 1. Una de estas piezas se coloca sobre la otra, para que coincidan parcialmente. ¿Cuál es la mayor longitud posible de la zona en la que las piezas coinciden?

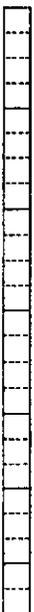
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



18 En una bolsa tenemos 17 bolas numeradas de 1 al 17. Si elegimos algunas de ellas al azar, ¿cuál es el menor número de bolas que debemos elegir para garantizar que la selección contiene al menos un par de bolas cuyos números sumen 18?

- A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 17

19 Un rectángulo de longitud 24 m y anchura 1 m se corta en pequeños rectángulos de anchura 1 m. Hay cuatro trozos de longitud 4 m, dos de longitud 3 y uno de longitud 2. Esos rectángulos más pequeños se juntan para formar otro rectángulo. ¿Cuál es el menor valor posible del perímetro del nuevo rectángulo?



- A) 14m B) 20 m C) 22 m D) 25 m E) 28 m

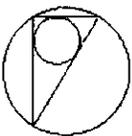
20 Un automóvil circula con una velocidad constante de 90 km/h. Cuando el reloj del coche marca las 21:00, el cuentakilómetros marca 116,0 km, indicando que se han recorrido en ese momento 116,0 km. Más tarde, el cuentakilómetros muestra la misma secuencia de números que el reloj. ¿A qué hora ocurrió esto?

- A) 21:30 B) 21:50 C) 22:00 D) 22:10 E) 22:30

Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21 Sean a y b los catetos de un triángulo rectángulo. Si d es el diámetro de la circunferencia inscrita y D el diámetro de la circunferencia circunscrita a este triángulo, entonces d + D es igual a...

- A) a+b B) 2(a+b) C) 0,5 · (a+b) D) $\sqrt{a \cdot b}$ E) $\sqrt{a^2 + b^2}$

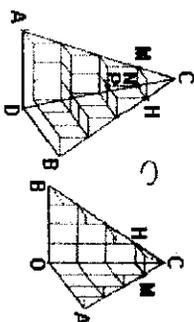


22 ¿Cuántos enteros positivos verifican la desigualdad $2000 < \sqrt{n(n+1)} < 2005$?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23 Catorce cubos de volumen 1 están colocados en una esquina y rodeados por una pirámide, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?

- A) $\frac{64}{3}$ B) 64 C) $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ D) $\frac{64\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{32}{3}$

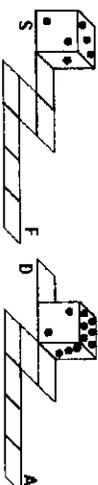


24 Carlos dice la verdad tres días a la semana durante todo el día y los cuatro restantes miente siempre. Hoy ha dicho exactamente cuatro de las siguientes frases. ¿Cuál de ellas no ha dicho hoy?

- A) Entre chicos y chicas tengo un número primo de amigos.
 B) Tengo tantos amigos chicos como amigas chicas.
 C) 288 es divisible por 4.
 D) Siempre digo la verdad.
 E) Tres de mis amigos son mayores que yo.

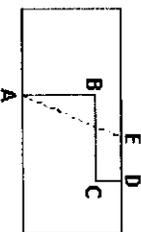
25 Las caras opuestas de un dado siempre suman 7. El dado rueda en un circuito como se presenta en la figura. Inicialmente, la cara superior es un 3. ¿Cuál será la cara superior al final del recorrido?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6



26 Dos trozos de terreno están separados por la linde ABCD, como muestra la figura. Los segmentos AB, BC y CD son paralelos a los lados del rectángulo y miden 30m, 24m, y 10m respectivamente. Se quiere convertir la linde en una recta AE, de tal manera que las áreas de los dos trozos de terreno no varíen. ¿a qué distancia de D debe estar E?

- A) 8m B) 10m C) 12m D) 14m E) 16m

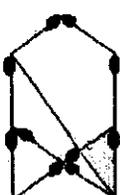


27 ¿Cuántos divisores de cuatro cifras tiene el número 102²?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

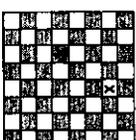
28 Diez cerillas iguales se usan para formar la figura. El área de la figura es 24. ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$



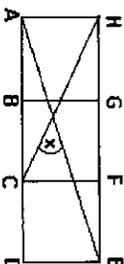
29 ¿Cuántas maneras hay de elegir una casilla blanca y una negra en el tablero de ajedrez 8x8 de manera que no estén en la misma fila y ni en la misma columna?

- A) 56 B) 5040 C) 720 D) 672 E) 768



30 Se juntan tres cuadrados como se indica en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo x de la figura?

- A) 30° B) 45° C) 60° D) 50° E) 40°



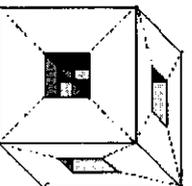


No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le correspondían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.

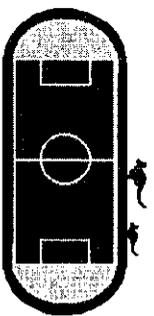
- 1 ¿Para cuál de los siguientes valores de x toma la expresión $\frac{x^2}{x^3}$ el menor valor?
A) 2 B) 1 C) -1 D) -2 E) -3
- 2 ¿Cuántos números, de 2 al 100, son el cubo de un número entero?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
- 3 Cinco cartas numeradas del 1 al 5 se colocan como se muestra en la figura (fila de arriba). Un movimiento consiste en intercambiar dos cartas de posición. ¿Cuál es el menor número de movimientos necesarios para ordenarlas en orden creciente (fila de abajo)?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
- 4 ¿Si $8886 \times 11 = 2 \times (2n)^2$, y n es un número entero positivo, el valor de n es:
A) 8 B) 11 C) 22 D) 111 E) 444
- 5 Hay ocho canguros en las casillas de la tabla, como se ve en la figura de la derecha. Cada canguro puede saltar a cualquier casilla libre. Encuentra el mínimo número de canguros que tienen que saltar a otra casilla para que haya exactamente dos canguros en cada fila y dos en cada columna de la tabla.
- | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
- 6 Un trozo de papel con forma cuadrada se ha dividido en tres trozos. ¿Qué forma tiene el tercer trozo?
- A)  B)  C)  D)  E) 
- 7 La suma de cuatro números enteros consecutivos no puede ser igual a:
A) 2002 B) 22 C) 202 D) 222 E) 220

- 8 Un cubo $3 \times 3 \times 3$ pesa 810 gramos. Se hacen tres agujeros en él, en forma de ortocentro de tamaño $1 \times 1 \times 3$, como se muestra en la figura. El peso del sólido restante es:
A) 540g B) 570g C) 600g D) 630g E) 660g

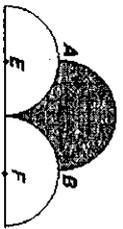


- 9 $f(x)$ es una función tal que $\begin{cases} f(x+1) = 2f(x) - 2002 & \forall x \in \mathbb{Z} \\ f(2005) = 2008 \end{cases}$. Entonces $f(2004)$ vale:

- 10 Mamá-canguro y su cría saltan alrededor del estadio, que tiene un perímetro de 330 m... Ambas dan un salto por segundo, pero mientras los saltos de Mamá-canguro son de 5 metros de largo, los de la cría son de 2 metros de largo. Empezan en el mismo instante, en el mismo sitio, y se mueven en el mismo sentido. Después de 25 segundos la cría se cansa y se para, mientras que Mamá-canguro sigue saltando. ¿Cuántos segundos pasará la cría esperando a que le alcance su madre?
A) 15 B) 25 C) 51 D) 66 E) 76

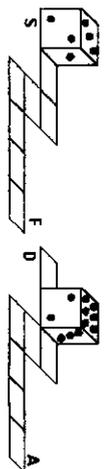


- 11 La figura muestra tres semicircunferencias con los puntos A y B situados exactamente sobre los centros E y F de las dos semicircunferencias inferiores. Si el radio de cada semicircunferencia es 2 cm, el área en cm^2 de la región sombreada es:
A) 8 B) 7 C) 2π D) $2\pi + 1$ E) $2\pi + 2$



- 12 Dos botellas de igual volumen están llenas, ambas, de agua y zumo. Las razones de los volúmenes de agua y zumo son, respectivamente 2:1 y 4:1. Echamos las mezclas de ambas botellas en una garrafa. La proporción de agua y zumo en la garrafa es:
A) 3:1 B) 6:1 C) 11:4 D) 5:1 E) 8:1

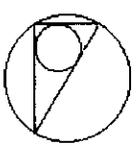
- 13 Las caras opuestas de un dado siempre suman 7. El dado rueda en un circuito como se presenta en la figura. Inicialmente, en D, la cara superior es un 3. ¿Cuál será la cara superior al final del recorrido, en A?



- 14 Una caja contiene 60 tarjetas. Unas son rojas, otras azules y el resto blancas. Si todas las tarjetas rojas se sustituyeran por azules, entonces habría el doble de tarjetas azules que blancas.; pero si todas las tarjetas blancas se sustituyeran por azules, entonces habría el triple de tarjetas azules que rojas. El número inicial de tarjetas azules era:
A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

15 Sean a y b los catetos de un triángulo rectángulo. Si d es el diámetro de la circunferencia inscrita y D el diámetro de la circunferencia circunscrita a este triángulo, entonces $d + D$ es igual a...

- A) $a+b$ B) $2(a+b)$ C) $0,5 \cdot (a+b)$ D) $\sqrt{a \cdot b}$ E) $\sqrt{a^2 + b^2}$



16 Sea M el conjunto de todos los números reales x que verifican la desigualdad $2^{4x} < 4^{2x}$. Entonces M es el conjunto:

- A) $(-\infty, 1)$ B) $(0, 1)$ C) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ D) $(0, \infty)$ E) \mathbb{R}

17 ¿Cuántos divisores de cuatro cifras tiene el número 102^2 ?

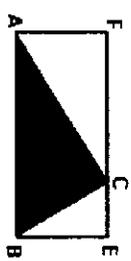
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18 Julia pintó de blanco o de negro cada cara de varios cubos, usando los dos colores en cada cubo. ¿Cuántas coloraciones distintas hay?

- A) 8 B) 16 C) 32 D) 52 E) 64

19 La figura muestra un rectángulo $ABEF$ y un triángulo ABC . Se sabe que $\widehat{ACF} = \widehat{CBE}$. Si $FC = 6$ y $CE = 2$ entonces el área de ABC es:

- A) 12 B) 16 C) $8\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{3}$ E) Otro valor



20 Carlos dice la verdad tres días a la semana durante todo el día y los cuatro restantes miente siempre. Hoy ha dicho exactamente cuatro de las siguientes frases. ¿Cuál de ellas no ha dicho hoy?

- A) Entre chicos y chicas tengo un número primo de amigos.
 B) Tengo tantos amigos chicos como amigas chicas.
 C) 288 es divisible por 4.
 D) Siempre digo la verdad.
 E) Tres de mis amigos son mayores que yo.

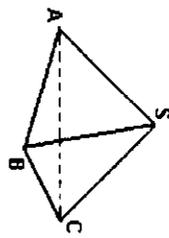
Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21 ¿Cuál de los siguientes números se puede escribir como el producto de cuatro enteros diferentes mayores que 1?

- A) 625 B) 124 C) 108 D) 2187 E) 2025

22 En la pirámide $SABC$ todos los ángulos planos con vértice en S miden 90° . Las áreas de las caras laterales SAB , SAC y SBC son 3, 4 y 6, respectivamente. El volumen de la pirámide es:

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 12



23 Si la suma de las cifras del número m es 30 entonces la suma de las cifras de $m + 3$ no puede ser

- A) 6 B) 15 C) 21 D) 24 E) 33

24 En una bolsa hay 17 bolas numeradas con los números $5 + 125^k$, con $k = 0, 1, \dots, 16$. Si elegimos varias bolas al azar, ¿cuál es el menor número de bolas que es necesario extraer para garantizar que la selección incluye al menos un par de bolas que sumen 20107?

- A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 17

25 Si sabemos que $\log_{10}(\sqrt{2005} + \sqrt{1995}) = n$ ¿cuál de los siguientes números es el valor de $\log_{10}(\sqrt{2005} - \sqrt{1995})$?

- A) $n - 1$ B) $1 - n$ C) $\frac{1}{n}$ D) $n + 1$ E) imposible determinar con esos datos

26 Enrique debe viajar desde A hasta B y planea hacerlo a una cierta velocidad. Le gustaría llegar antes de lo previsto, y observa que si viajase 5 km/h más deprisa que lo planeado, llegaría 5 horas antes, y si viajase 10 km/h más deprisa que lo planeado, llegaría 8 horas antes. ¿A qué velocidad lo planeó?

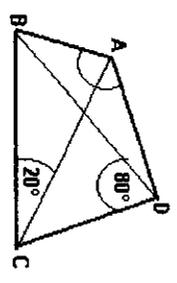
- A) 10 km/h B) 15 km/h C) 20 km/h D) 25 km/h E) es imposible saberlo

27 Empezamos con un número, lo duplicamos y luego restamos 1. Después de aplicar este procedimiento 98 veces más (empezando cada vez con el resultado de la vez anterior) se obtiene $2^{100} + 1$. ¿Con qué número empezamos?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 3

28 En el cuadrilátero $ABCD$ la diagonal BD es la bisectriz del ángulo \widehat{ABC} y $AC = BC$. Si $\widehat{BDC} = 80^\circ$ y $\widehat{ACB} = 20^\circ$, entonces \widehat{BAD} mide

- A) 90° B) 100° C) 110° D) 120° E) 135°



29 El entero A tiene exactamente dos divisores positivos y el entero B tiene exactamente 5 divisores positivos. Si A no es divisor de B , ¿cuántos divisores tiene el número $A \cdot B$?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) imposible determinar con esos datos

30 En la figura $ABCDEFGH$ es un octógono regular de lado 1. Los puntos P y Q son los puntos de intersección de las circunferencias de centros A , B y C y radio 1. La medida del ángulo \widehat{APQ} en radianes es

- A) $\frac{19}{24}\pi$ B) $\frac{8}{11}\pi$ C) $\frac{5}{8}\pi$ D) $\frac{3}{4}\pi$ E) $\frac{7}{9}\pi$

